Aufgaben zur Vorlesung

K-Theorie und die Hopf-Invariante

Aufgabe 1. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre und sei

$$TS^n = \big\{(x,v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v\rangle = 0\big\}$$

Sei $p\colon TS^n \to S^n$ gegeben durch $p(x,v) = x$. Zeige, dass $p\colon TS^n \to S^n$ lokal trivial ist.

Aufgabe 2. Zeige Sie, dass jeder kompakte Hausdorffraum normal ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Sei $p\colon E \to X$ ein n-dimensionales K-Vektorbündel. Zeige, dass E genau dann isomorph zum trivialen Vektorbündel $X \times K^n$ ist, falls Schnitte $s_i\colon X \to E$ mit $i \in \{1,\dots,n\}$ existieren, so dass $\{s_1(x),\dots,s_n(x)\} \subset E_x$ für alle $x \in X$ linear unabhängig ist

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Seien $p_i\colon E_i \to X$ für $i \in \{1,2\}$ zwei endlichdimensionale K-Vektorbündel über X und sei $(\bar{f}, \mathrm{id}_X)\colon E_1 \to E_2$ ein Morphismus von Vektorbündeln, der jede Faser $(E_1)_x$ injektiv nach $(E_2)_x$ abbildet.

(a) Zeige, dass dann ein Vektorbündel $q\colon F \to X$ existiert, so dass $E_2 \cong E_1 \oplus F$ gilt.

(b) Finde eine geeignete Definition für das Quotientenvektorbündel E_2/E_1 und zeige, dass es lokal trivial ist.

Aufgabe 5. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Seien $p\colon E \to X$ und $q\colon F \to X$ Vektorbündel und sei $(\bar{f}, \mathrm{id}_X)\colon E \to F$ ein Morphismus von Vektorbündeln. Ist dann

$$\ker(\bar{f}) = \{v \in E \mid \bar{f}(v) = 0 \in F_{p(v)}\}$$

zusammen mit der Abbildung $p|_{\ker(\bar{f})}$ auch ein Vektorbündel?

Hinweis: Suche nicht zu lange nach einem Beweis, sondern eher nach einem Gegenbeispiel!

Aufgabe 6. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Sei $p\colon E \to X$ ein endlichdimensionales K-Vektorbündel. Zeige, dass dann ein K-Vektorbündel $q\colon F \to X$ existiert, so dass $E \oplus F$ trivialisierbar ist. Hieraus folgt Lemma 3.8 aus der Vorlesung.

Aufgabe 7. Sei folgendes Diagramm ein Pushout-Diagramm von kompakten Hausdorffräumen:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\
X_2 \arrow[r, hook, "j_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

Seien $p_i \colon E_i \to X_i$ for $i \in \{1,2\}$ K-Vektorbündel und $f \colon i_1^* E_1 \to i_2^* E_2$ ein Isomorphismus von K-Vektorbündeln über X_0. Zeige, dass dann

$$E = E_1 \amalg E_2 / \sim$$

mit der Äquivalenzrelation, die erzeugt wird von $v_1 \sim f(v_1)$ für alle $v_1 \in E_1$ mit $p_1(v_1) \in X_0$ ein K-Vektorbündel über X ist. Dies ist Lemma 3.7 aus der Vorlesung.

Aufgabe 8. Sei $U(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ die unitäre Gruppe, $GL_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen und sei $T(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Werten auf der Diagonalen.

(a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi \colon U(n) \times T(n) \to GL_n(\mathbb{C})$ gegeben durch $\Phi(U,T) = U \cdot T$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Folgere hieraus, dass $U(n) \to GL_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz ist.

(c) Zeige, dass $GL_n(\mathbb{C})$ wegzusammenhängend ist.