

Ziel: Definiere höhere K -Gruppen als Homotopiegruppen eines topologischen Raumes, den wir einer Waldhausen-Kategorie \mathcal{C} zuordnen.
z.B. $\text{Spt}(\mathcal{C})$

§ 1. Simpliciale Mengen, Räume und Kategorien

Sei Δ die folgende Kategorie

$$\text{Ob}(\Delta) := [n] := \{0, \dots, n\}$$

$$\text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) := \text{ordnungserh. Abb. } f: [n] \rightarrow [m] \\ (\text{also } i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j))$$

Sei Δ^{op} die entgegengesetzte Kategorie, d.h.

$$\text{Ob}(\Delta^{\text{op}}) = \text{Ob}(\Delta)$$

$$\text{Hom}_{\Delta^{\text{op}}}([m], [n]) = \text{Hom}_{\Delta}([n], [m]) \quad \text{mit } f \circ_{\Delta^{\text{op}}} g = g \circ f$$

(Ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ entspricht einem kontravarianten Funktor $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$)

Def. 1.1.: Eine simpliciale Menge X ist ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{MENSCHEN}$

$X_n := X([n])$ heißt Menge der n -Simplizes

Sei $d^i: [n-1] \rightarrow [n]$ geg. durch $d^i(k) = \begin{cases} k & k < i \\ k+1 & k \geq i \end{cases}$

$s^i: [n+1] \rightarrow [n]$ durch $s^i(k) = \begin{cases} k & k \leq i \\ k-1 & k > i \end{cases}$

$d_i := X(d^i): X_n \rightarrow X_{n-1}$ Randabbildungen von X (face maps)

$s_i := X(s^i): X_n \rightarrow X_{n+1}$ Entartungsabbildungen von X (degeneracy maps)

$$X_2 \begin{matrix} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{s_0} \end{matrix} X_1 \begin{matrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{matrix} X_0$$

Morphismus α zwischen simp. Mengen X und Y ist eine nat. Transformation, d.h. eine Familie von Abb. $\varphi_n: X_n \rightarrow Y_n$, so dass

$$X_m \xrightarrow{\varphi_m} Y_m \\ \downarrow X(f) \qquad \qquad \downarrow Y(f) \quad \text{für } f: [n] \rightarrow [m] \text{ kommutiert.} \\ X_n \xrightarrow{\varphi_n} Y_n$$

\rightsquigarrow Kategorie SIMP MENSCHEN

allgemeiner simpliciale Objekte in Kategorie \mathcal{C}

(Haupt-) Beispiel 1.2: Nerv einer Kategorie. Sei CAT die Kategorie der (kleinen) Kategorien

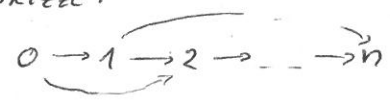
Definiere zu jedem $[n] \in \text{Ob}(\Delta)$ eine Kategorie $\mathcal{L}([n])$ mit

$$\text{Ob}(\mathcal{L}([n])) = \{0, \dots, n\}$$

+ genau ein Morphismus $i \rightarrow j$, falls $i \leq j$

\rightarrow Verknüpfung festgelegt

Skizze:



Morphismus $f: [n] \rightarrow [m]$ induziert Funktor

$$\mathcal{L}(f): \mathcal{L}([n]) \rightarrow \mathcal{L}([m]) \text{ durch } \mathcal{L}(f)(i) = f(i)$$

Wir haben $\mathcal{L}(\text{id}) = \text{id}$ und $\mathcal{L}(f \circ g) = \mathcal{L}(f) \circ \mathcal{L}(g)$.

$\leadsto \mathcal{L}: \Delta \rightarrow \text{CAT}$ ist ein Funktor.

Sei \mathcal{C} eine kleine Kategorie. Betrachte

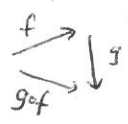
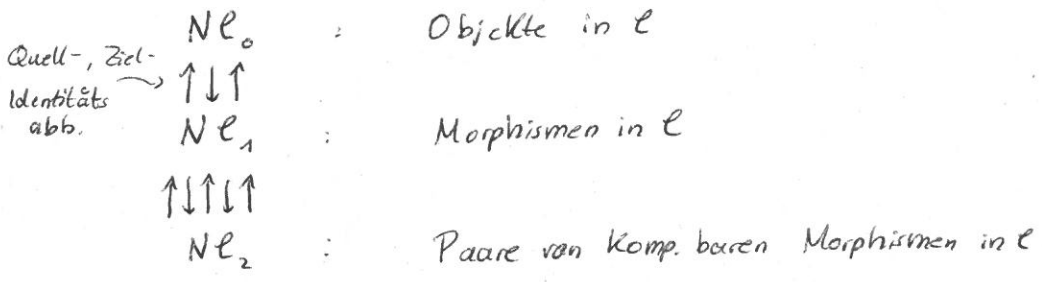
$$N_{\mathcal{C}}: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{MENGEN}$$

$$[n] \mapsto \text{Fun}(\mathcal{L}([n]), \mathcal{C}) \text{ auf Obj.}$$

$$f \mapsto \mathcal{L}(f)^* \text{ auf Mor. mit } \mathcal{L}(f)^*(F) = F \circ \mathcal{L}(f)$$

$$\text{Hom}_{\Delta}^m([m], [n]) \text{ für } F: \mathcal{L}([n]) \rightarrow \mathcal{C}$$

$N_{\mathcal{C}}$ ist eine simpliziale Menge, die auch Nerv von \mathcal{C} heißt



Ein Funktor $\mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}$ induziert Morphismus $N_{\mathcal{C}} \rightarrow N_{\mathcal{D}}$ von simpl. Mengen.

$$\text{durch } N_{\mathcal{C}_n} \xrightarrow{NG_n} N_{\mathcal{D}_n} \text{ mit } NG_n(F) = G \circ F.$$

Das heißt: Nerv-Konstruktion ist selbst ein Funktor

$$N: \text{CAT} \rightarrow \text{SIMP MENSCHEN}$$

§2. Geometrische Realisierung

Standard-Simplex liefert Funktor $\Delta : \Delta \rightarrow TOP$ gegeben durch

$$\Delta^n := \Delta([n]) = \{ (t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \}$$

und für $f \in Hom_{\Delta}([n], [m])$:

$$\Delta(f) : \Delta^n \rightarrow \Delta^m ; (t_0, \dots, t_n) \mapsto (s_0, \dots, s_m) \text{ mit } s_i = \sum_{f(j)=i} t_j \quad (\text{leere Summe} = 0)$$

Def. 2.1: Sei $X : \Delta^{op} \rightarrow MENGEN$ eine simpl. Menge; dann heißt

$$|X| = \coprod_{n \in \mathbb{N}_0} X_n \times \Delta^n / \sim \quad \text{mit } (X(f)(x), t) \sim (y, \Delta(f)(t)) \text{ f\u00fcr } x \in X_m, t \in \Delta^n$$

die geometrische Realisierung von X .

Satz 2.2: Geom. Realisierung liefert einen Funktor $|-| : SIMPMENGEN \rightarrow TOP$

$$\text{durch } |\varphi|([x, t]) = [\varphi_n(x), t] \text{ f\u00fcr } \varphi \in Hom_{SIMPMENGEN}(X, Y), x \in X_n, t \in \Delta^n.$$

Beweis: $|\text{id}| = \text{id} \checkmark$

zu zeigen: $|\varphi|$ wohldefiniert

$$|\varphi| \circ |\psi| = |\varphi \circ \psi| \checkmark$$

$$|\varphi|([X(f)(x), t]) = [\varphi_n(X(f)(x)), t] = [Y(f)(\varphi_m(x)), t] \\ |\varphi|([x, \Delta(f)(t)]) = \dots = [\varphi_m(x), \Delta(f)(t)]$$

f\u00fcr $f \in Hom_{\Delta}([n], [m]), x \in X_m, t \in \Delta^n$.

□

Def. 2.3: $\cdot) X : \Delta^{op} \rightarrow TOP$ simplizialer (top.) Raum \rightsquigarrow Kategorie SIMPTOP

$\cdot) X : \Delta^{op} \rightarrow CAT$ simpliziale Kategorie \rightsquigarrow Kategorie SIMPCAT

Geom. Realisierung l\u00e4sst sich zu Funktor

$$|-| : SIMPTOP \rightarrow TOP \text{ erweitern } (X_n \times \Delta^n \text{ hat Produkttopologie}).$$

Sei \mathcal{X} simpl. Kategorie, dann ist

$$[n] \mapsto |N\mathcal{X}_n| \text{ ein simplizialer Raum } (= |-| \circ N \circ \mathcal{X} : \Delta^{op} \rightarrow TOP)$$

Dessen geometrische Realisierung hei\u00dft auch geom. Realisierung von \mathcal{X} .

§3. Die S.-Konstruktion

basiert auf einer anderen Diagramm-Kategorie als $\mathcal{L}([n])$, n\u00e4mlich:

$$\text{Pfeil} : \Delta \rightarrow CAT$$

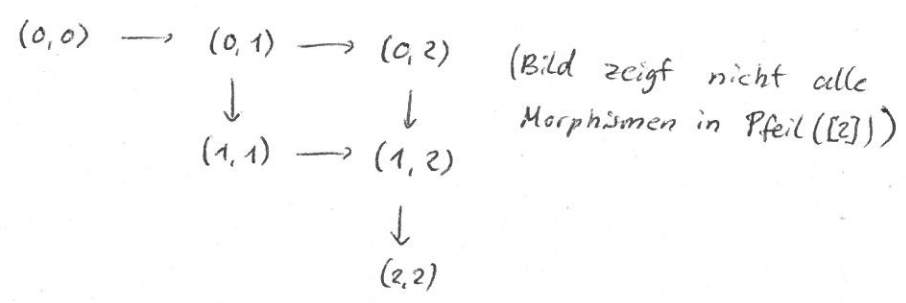
$$[n] \mapsto \{ (i, j) \in [n] \times [n] \mid i \leq j \}$$

mit ~~genau~~ genau einem Morphismus

$$(i, j) \rightarrow (i', j') \text{ falls } i \leq i' \text{ und } j \leq j'$$

$(f : [n] \rightarrow [m]) \mapsto \text{Pfeil}(f) : \text{Pfeil}([n]) \rightarrow \text{Pfeil}([m])$
definiert durch $\text{Pfeil}(f)(i, j) = (f(i), f(j))$

Beispiel 3.1.: $\text{Pfeil}([2]) :$



Def. 3.2.: Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit Kofaserungen.

$\text{Fun}(\text{Pfeil}([n]), \mathcal{C})$ ist Kategorie von $\text{Pfeil}([n])$ -Diagrammen in \mathcal{C} (Mor. = nat. Trafos)

Definiere $S_n \mathcal{C} \subseteq \text{Fun}(\text{Pfeil}([n]), \mathcal{C})$

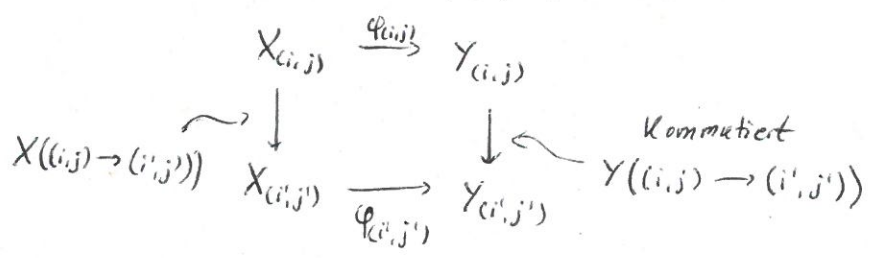
als diejenige Unterkategorie, deren Objekte X folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $X_{(i,j)} = X_{(j,i)} = *$ für alle $j \in [n]$.

(b) für $i < j < k$ in $[n]$ ist

$X_{(i,j)} \twoheadrightarrow X_{(i,k)} \twoheadrightarrow X_{(i,k)}$ eine Kofaser-Sequenz

Ein Morphismus in $S_n \mathcal{C}$ ist eine Familie $\varphi_{(i,j)} : X_{(i,j)} \rightarrow Y_{(i,j)}$ von Morphismen in $\mathcal{C} \forall i, j \in [n]$, so dass



Sei $f \in \text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$ und, definiere $\mathcal{S}(f) : S_n \mathcal{C} \rightarrow S_m \mathcal{C}$

durch $\mathcal{S}(f)(X) = X \circ \text{Pfeil}(f) : \text{Pfeil}([m]) \rightarrow \text{Pfeil}([n]) \rightarrow \mathcal{C}$

also $(\mathcal{S}(f)(X))_{(i,j)} = X_{(f(i), f(j))}$.

Wir erhalten hier durch eine simpl. Kategorie

$\mathcal{S} : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{CAT}$

S -Konstruktion von \mathcal{C}

Bem. 3.3: $\cdot)$ $S_0 \mathcal{C} : \mathbb{Q}^{id}$ Triviale Kat. auf Nullobj. von \mathcal{C}

$\cdot)$ $S_1 \mathcal{C} : * \rightarrow X_{(0,1)}$ ist natürlich isomorph zu \mathcal{C}
 \downarrow
 $*$

$\cdot)$ $S_2 \mathcal{C} : * \rightarrow X_{(0,1)} \rightarrow X_{(0,2)}$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $*$ \rightarrow $X_{(1,2)}$
 \downarrow
 $*$
Kategorie der Kofaserseq. von \mathcal{C}

Haupt eigenschaft der S-Konstr. :

- $\cdot)$ Falls \mathcal{C} Waldhausen $\rightsquigarrow S_n \mathcal{C}$ auch Waldhausen $\forall (n) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\cdot)$ $K_i(\mathcal{C}) := \pi_{i+1}(\|wsc\|)$
 \uparrow geom. Realisierung der simpl. Kategorie
- $\cdot)$ Kanonische Abbildung
 $|N\mathcal{C}| \rightarrow \Omega |Nwsc|$ aus Einbettung des 1-Skeletts